## Corrigés des exercices 4.14 à 21.4 — حلول التمارين من 14.4 إلى 21.4

**Exercice 4.14 :**

En intégrant nous obtenons les deux équations horaires :

$$v_x = 4t^3 + 4t \ , \ x = \int\left(4t^3 + 4t\right)dt \Rightarrow x = t^4 + 2t^2 + C_x$$

$$v_y = 4t \ , y = \int 4t.dt \Rightarrow y = 2t^2 + C_y$$

Les conditions initiales nous permettent de déterminer les deux constantes d'intégration $C_x$ et $C_y$ :

$$t = 0 \ , \ x = 1 \ , \ y = 2 \Rightarrow C_x = 1 \ , \ C_y = 2$$

On obtient : $x = t^4 + 2t^2 + 1 \ , \ y = 2t^2 + 2$

D'où l'équation de la trajectoire :

$$x = \left(t^2 + 1\right)^2 \ , \ y = 2\left(t^2 + 1\right) \Rightarrow \boxed{y = 2\sqrt{x}}$$

**Exercice 4.15 :**

1/ En intégrant deux fois de suite, nous obtenons les deux équations horaires du mouvement :

$$a_x = -4\sin t \Rightarrow v_x = 4\cos t + v_{0x} \ , \ x = 4\sin t + v_{0x}.t + C_x$$
$$a_y = 3\cos t \Rightarrow v_y = 3\sin t + v_{0y} \ , \ y = 3\sin t + v_{0y}.t + C_y$$

Les conditions initiales nous permettent d'obtenir les constantes d'intégration : $v_{0x}$ ، $v_{0y}$ ، $C_x$ et $C_y$ :

$$t = 0 \ , \ x = 0 \ , \ y = -3 \ , \ v_x = 4 \ , \ v_y = 0 \Rightarrow v_{0x} = 0 \ , \ v_{0y} = 0 \ , C_x = 0 \ , \ C_y = 0$$

Nous obtenons :

$$v_x = 4\cos t \ , \ v_y = 3\sin t$$
$$x = 4\sin t \ , \ y = -3\cos t$$

L'équation de la trajectoire est donc :

$$x = 4\sin t, \ \ y = -3cost \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{16} = 1}$$

La trajectoire est une ellipse.

2/ La vitesse au temps $t = \frac{\pi}{4}s$ est :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow v = \sqrt{16\sin^2\frac{\pi}{4} + 9\cos^2\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{v = 3,53ms^{-1}}$$

**Exercice 4.16 :**

L'équation horaire en coordonnées curviligne est $s(t) = 2t^2$. Nous avons vu dans le cours que la vitesse est $v = \frac{ds}{dt}$. Calculons cette vitesse : $v = \frac{ds}{dt} = 4t$. Ceci nous informe que les équations horaires $x$ et $y$ sont du second degré par rapport au temps. Partant de cela nous pouvons écrire :

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha t^2 + \beta t + x_0 \Rightarrow v_x = 2\alpha t + \beta \\ y = \gamma t^2 + \delta t + y_0 \Rightarrow v_y = 2\gamma t + \delta \end{array}\right| \Rightarrow v^2 = \left(4\alpha^2 t^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta.t\right) + \left(4\gamma^2 t^2 + \delta^2 + 4\gamma\delta.t\right)$$

Organisons cette dernière équation sous la forme :

$$v^2 = \left(4\alpha^2 + 4\gamma^2\right)t^2 + \left(4\alpha\beta + 4\gamma\delta\right)t + \beta^2 + \delta^2$$

Nous avons trouvé précédemment $v^2 = 4t^2$

Par identification des deux équations précédentes, nous obtenons un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{array}{l} \left(4\alpha^2 + 4\gamma^2\right)t^2 = 4t^2 \rightarrow (1) \\ \left(4\alpha\beta + 4\gamma\delta\right)t = 0 \rightarrow (2) \\ \beta^2 + \delta^2 = 0 \rightarrow (3) \end{array}$$

De $(3)$ on en déduit $\beta = \delta = 0$, des conditions initiales on tire $x_0 = -2$ et $y_0 = 0$.

Les deux équations horaires sont donc :

$$x = \alpha t^2 - 2 \quad , \quad y = \gamma t^2 \rightarrow (4)$$

Reste à déterminer $\alpha$ et $\gamma$.

Nous remplaçons dans l'équation de la trajectoire pour obtenir :

$$y = (x+2) = 3\left(\alpha t^2 - 2 + 2\right) \Rightarrow y = 3\alpha t^2 \rightarrow (5)$$

On égalise les deux équations $(4)$ et $(5)$ pour déduire la valeur de $\gamma$ :

$$y = 3\alpha t^2 = \gamma t^2 \Rightarrow \gamma = 3\alpha$$

De l'équation $(1)$ on obtient : $4\alpha^2 + 4\gamma^2 = 4$. Donc :

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = 3\alpha \\ 4\alpha^2 + 4\gamma^2 = 4 \end{array}\right| \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{5}} \quad , \quad \gamma = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Puisque l'abscisse curviligne $s$ croît avec $y$, nous n'acceptons que les racines positives, et par substitution dans l'équation $(4)$ on obtient:

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{2}{5}}t^2 - 2 \ , \ y = 3\sqrt{\frac{2}{5}}t^2}$$

**Exercice 4.17 :**

1/ Equation de la trajectoire : On élimine le temps entre les équations horaires pour obtenir $y = f(x)$ : $t = \frac{1}{2}x \Rightarrow \boxed{y = x^2 - 2x}$. La trajectoire est une parabole.

2/ La vitesse du mobile : On dérive le vecteur position par rapport au temps :

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 2 \\ v_y &= 8t - 4 \end{aligned}\right| \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{(8t-4)^2 + 4}}\ (ms^{-1})$$

3/ Accélération du mobile : En dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps on arrive à :

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = 8 \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{a = 8ms^{-2} = C^{te}}$$

4/ L'accélération tangentielle est la dérivée du module de la vitesse par rapport au temps, donc :

$$a_T = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{a_T = \frac{8(8t-4)}{\sqrt{(8t-4)^2 + 4}}}\ (ms^{-2})$$

L'accélération normale vaut :

$$a_N^2 = a^2 - a_T^2 \Rightarrow \boxed{a_N = \frac{16}{\sqrt{\left[(8t-4)^2 + 4\right]}}}\ (ms^{-2})$$

5/ Le rayon de courbure est :

$$a_N = \frac{v^2}{r} \ ,\ r = \frac{v^2}{a_N} \Rightarrow \boxed{r = \frac{16}{\sqrt{\left[(8t-4)^3 + 4\right]}}}\ (m)$$

**Exercice 4.18 :**

1/ En éliminant le temps entre les équations paramétriques, et cela en les élevant au carré d'abord puis en les additionnant membre à membre, on obtient l'équation de la trajectoire $\boxed{x^2 + y^2 = 4}$. La trajectoire tracée par le mobile est un cercle de centre $O$ et de rayon $R = 2$.

2/ Les deux composantes du vecteur accélération et le module du vecteur vitesse sont:

$$v_x = -\sin\frac{t}{2} \ ,\ v_y = \cos\frac{t}{2} \ ;\ v^2 = v_x^2 + v_y^2 \Leftrightarrow v^2 = 1 \ ,\ \boxed{v = \frac{ds}{dt} = 1ms^{-1}}$$

3/ L'intégration du vecteur vitesse $v=\dfrac{ds}{dt}$ , conduit à l'équation horaire du mouvement en coordonnées curvilignes : $s=\int v.dt \Rightarrow v=t+C$

Et puisque au temps $t=0$, $s=0$, donc $C=0$ et l'équation horaire est $\boxed{s=t}$.

4/ On dérive la vitesse par rapport au temps pour aboutir à l'accélération :

$a_x=-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}$ ; $a_y=-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{t}{2}$ ; $\boxed{a^2=a_x^2+a_y^2=0,25ms^{-2}}$

Dans la base de Frenet :

$$\boxed{a_T=\frac{dv}{dt}=0} \;,\; a_N=\sqrt{a^2-a_T^2}\Rightarrow \boxed{a_N=0,5ms^{-2}}$$

5/ Le rayon d courbure est : $R=\dfrac{v^2}{a_N}\Rightarrow \boxed{R=2m}$

6/ L'accélération angulaire est logiquement la dérivée de la vitesse angulaire par rapport au temps : $\ddot{\theta}=\dfrac{d\omega}{dt}=0,2t$

La vitesse angulaire est donc : $\omega=\int 0,2t.dt \Rightarrow \omega=0,1t^2+C$

Et puisqu'à $t=0$, $s=0$, alors $C=0$ et la vitesse angulaire vaut : $\boxed{\omega=0,1t^2}$.

Nous pouvons à présent déduire la vitesse instantanée : $v=\omega R=0,1Rt^2\Rightarrow \boxed{v=0,2t^2}$

La vitesse atteint la valeur $10ms^{-2}$ à l'instant $10=0,2t^2\Rightarrow \boxed{t=7,1s}$

En intégrant la vitesse angulaire, nous obtenons l'angle balayé, et de là on calcule la distance parcourue : $\theta=\dfrac{0,1}{3}t^3$ , $s=R\theta=\dfrac{0,1}{3}.2.(7,1)^3\Rightarrow \boxed{s\simeq 23,9m}$

**Exercice 4.19 :**

1/ Partant des différentes expressions connues, on peut calculer le vecteur accélération du mobile :

$$\vec{r}=r.\vec{u}_r=\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_r \;;\; \theta=\frac{t}{b} \;;\; \dot{\vec{u}}_r=\dot{\theta}.\vec{u}_\theta \;;\; \dot{\vec{u}}_\theta=-\dot{\theta}.\vec{u}_r$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{r}.\vec{u}_r+r.\dot{\vec{u}}_r\Rightarrow \vec{v}=-\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_r+\frac{r_0}{b}.e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_\theta \;;\; \boxed{\vec{v}=\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}\left(-\vec{u}_r+\vec{u}_\theta\right)}$$

2/ Pour calculer l'angle $(\vec{v},\vec{u}_\theta)=\alpha$ on fait appel aux propriétés du produit scalaire :

$$\vec{v}.\vec{u}_\theta=v.u_\theta.\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\vec{v}.\vec{u}_\theta}{v.u_\theta}$$

On remplace $\vec{v}$ et $v$ par leur expressions respectives :

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}.\vec{u}_\theta}{v.u_\theta} = \frac{\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}\left(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta\right).\vec{u}_\theta}{\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.u_\theta} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{u_\theta} = 1 \Rightarrow \boxed{\left(\vec{v},\vec{u}_\theta\right) = \alpha = 0} \;\; ; \;\; \vec{v} // \vec{u}_\theta$$

$$-\vec{u}_r.\vec{u}_\theta = 0 \;\; ; \;\; \vec{u}_\theta.\vec{u}_\theta = 1 \;\; , \;\; u_\theta = 1$$

Ce résultat indique que $\vec{v}$ et $\vec{u}_\theta$ sont colinéaires.

3/ Pour calculer le vecteur accélération, on dérive le vecteur vitesse par rapport au temps (c'est ce qui a été démontrée dans le cours) :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = \left(\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}} - \frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_r + \left(-2\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(-2\frac{r_0}{b^2}e^{-\frac{t}{b}}\right)\vec{u}_\theta}$$

4/ Pour calculer l'angle $\left(\vec{a},\vec{u}_N\right) = \beta$, on utilise les propriétés du produit scalaire :

$$\vec{a}.\vec{u}_N = a.u_N.\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{\vec{a}.\vec{u}_N}{a.u_N}$$

On remplace $\vec{a}$ et $a$ par leurs expressions respectives pour arriver à :

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}.\vec{u}_N}{a.u_N} = \frac{-2\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.\vec{u}_\theta.\vec{u}_N}{-2\frac{r_0}{b}e^{-\frac{t}{b}}.u_N} = \frac{\vec{u}_\theta.\vec{u}_N}{u_N} \rightarrow (1)$$

Nous avons vu à la question $(2)$ que $\vec{v}$ et $\vec{u}_\theta$ ont la même direction, soit $\left(\vec{v} = v.\vec{u}_\theta\right)$ ; de même $\vec{v} = v.\vec{u}_T$, donc $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_T$ sont parallèles, ce qui nous permet d'écrire : $\vec{u}_\theta = u_\theta.\vec{u}_T$.

Remplaçons maintenant $\vec{u}_\theta$ dans $(1)$ : $\cos\beta = \dfrac{u_\theta\vec{u}_T.\vec{u}_N}{u_N}$

Et puisque $\vec{u}_T.\vec{u}_N = 0$, donc $\cos\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\pi}{2}rad} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{u}_N$

**Exercice 4.20 :**

1/ Nous voyant sur la figure ci-dessous que l'abscisse instantanée du point $M$ est l'équation horaire demandée, elle est égale à :

$$\overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)^2$$

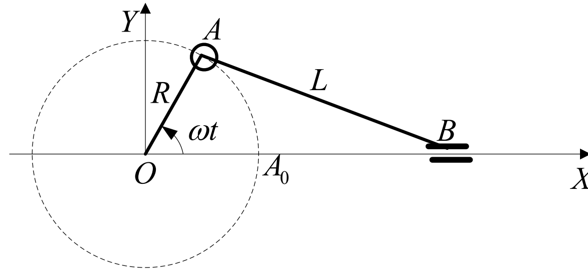
$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2.OA.OB.\cos\omega t$$

$$L^2 = x^2 + R^2 - 2Rx\cos\omega t \Leftrightarrow L^2 = x^2 + R^2\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right) - 2Rx\cos\omega t$$

$$L^2 = \left(x - R\cos\omega t\right)^2 + R^2\sin^2\omega t \Rightarrow \boxed{x = R\cos\omega t + \left(L^2 - R^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}}$$

Nous pouvons nous assurer que $x = R + L$ quand $\omega.t = 0$ .

2/ Instants où la vitesse s'annule.




Cherchons d'abord l'expression de la vitesse :

$$v = \frac{dx}{dt} = -R\omega\left(\sin\omega t + \frac{R\sin^2\omega t}{2\left(L^2 - R^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}}\right)$$

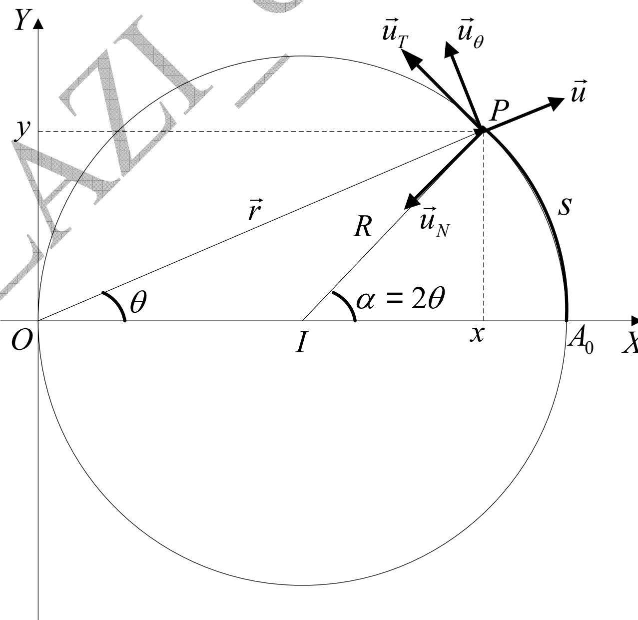
La vitesse s'annule donc aux instants :

$$v = -R\omega\left(\sin\omega t + \frac{R\sin^2\omega t}{2\left(L^2 - R^2\sin\omega t\right)^{1/2}}\right) = 0$$

$$\sin\omega t + \frac{R\sin^2\omega t}{2\left(L^2 - R^2\sin^2\omega t\right)^{1/2}} = 0 \Rightarrow \omega.t = k.\pi \Rightarrow \boxed{t = k\frac{\pi}{\omega}}$$

**Exercice 4.21 :**

1/ En regardant la figure on voit bien que : $\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OI} \Rightarrow R^2 = R^2 + r^2 - 2R.r.\cos\theta$




Donc l'équation polaire du cercle est : $r^2 = 2R.r.\cos\theta \Rightarrow \boxed{r = 2R.\cos\theta}$

L'équation cartésienne du cercle est :

$$\left.\begin{array}{l} r = 2R\cos\theta \\ r^2 = x^2 + y^2 \\ \cos\theta = \dfrac{x}{R} \\ \sqrt{x^2+y^2} = 2R\dfrac{x}{R} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2R.x = 0}$$

2/ La base polaire du point $P$ est représentée sur la figure. Pour calculer les composantes polaires de la vitesse et de l'accélération nous partons de l'expression du vecteur position : $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r.\vec{u}$ .

La première dérivée par rapport au temps nous donne l'expression du vecteur vitesse, soit :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ r = 2R\cos\theta \\ \dot{r} = -2R\dot{\theta}\sin\theta \end{array}\right| \Rightarrow \vec{v} = -2R\dot{\theta}.\sin\theta.\vec{u}_r + 2R\dot{\theta}.\cos\theta.\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{v} = 2R\dot{\theta}\left(-\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right)} \rightarrow (1)$$

La dérivée seconde par rapport au temps nous conduit à l'expression du vecteur accélération :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right).\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta \\ r = 2R\cos\theta \\ \dot{r} = -2R\dot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{r} = -2R\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a} = -2R\left(2\dot{\theta}^2.\cos\theta + \ddot{\theta}.\sin\theta\right)\vec{u}_r + 2R\left(\ddot{\theta}.\cos - 2\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\vec{u}_\theta} \rightarrow (2)$$

3/

- Expression de $s$ en fonction de $\theta$ :
  Nous rappelons ici une propriété géométrique du cercle : Dans un cercle, les angles qui interceptent le même arc de cercle, celui dont le sommet est au centre du cercle vaut le double de l'angle ayant son sommet sur la circonférence de ce même cercle. Voir figure ci-dessous. Donc :

$$\boxed{\alpha = 2\theta} \quad \boxed{s = \widehat{AP} = R.\alpha = 2R\theta}$$

- La base locale $\left(\vec{u}_T, \vec{u}_N\right)$ de $P$ est représentée sur la figure.
- Les composantes du vecteur vitesse sont : $\boxed{\vec{v} = v.\vec{u}_T = 2R\dot{\theta}.\vec{u}_T} \rightarrow (3)$
- Pour le vecteur accélération :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T \\ \vec{a}_N = \dfrac{v^2}{R}\vec{u}_N = 4R\dot{\theta}^2\vec{u}_N \\ \vec{a}_T = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_T = 2R\ddot{\theta}\vec{u}_T\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \underbrace{4R\dot{\theta}^2}_{a_N}\vec{u}_N + \underbrace{2R\ddot{\theta}}_{a_T}\vec{u}_T} \rightarrow (4)$$

Pour retrouver les expressions de la vitesse et de l'accélération dans la base polaire il suffit d'exprimer les vecteurs unitaires de la base locale en coordonnées polaires :

De la figure on en déduit :

$$\vec{u}_N = -\cos\theta.\vec{u}_r - \sin\theta.\vec{u}_\theta$$
$$\vec{u}_T = -\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta$$

En remplaçant dans les équations $(3)$ et $(4)$ nous obtenons les équations $(1)$ et $(2)$ obtenues précédemment :

$$\boxed{\vec{v} = v.\vec{u}_T = 2R\dot{\theta}.(-\sin\theta.\vec{u}_r + \cos\theta.\vec{u}_\theta)} = (1)$$

Organisons cette dernière équation:

$$\boxed{\vec{a} = -2R\left(2.\dot{\theta}^2.\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right).\vec{u}_r + 2R\left(\ddot{\theta}\cos\theta - 2\dot{\theta}^2\sin\theta\right).\vec{u}_\theta} = (2)$$

4/ A présent la vitesse angulaire est constante.

- L'angle $\theta$ balayé par le point $P$ durant $t$ est : $\alpha = 2\theta = \omega t \Rightarrow \boxed{\theta = \dfrac{\omega t}{2}}$
- L'expression de est : $\boxed{r = 2R\cos\dfrac{\omega}{2}t}$
- Expressions de la vitesse et de l'accélération : On sait depuis le début que $\boxed{\dot{\theta} = \dfrac{\omega}{2}}$.

  Nous remplaçons dans les expressions $(1),(2),(3)$ et $(4)$, $\theta$ et $\dot{\theta}$ par leurs valeurs respectives :

  - En coordonnées polaires : on remplace dans $(1)$ et $(2)$ :

$$\boxed{\vec{v} = R\omega\left(-\sin\frac{\omega t}{2}.\vec{u}_r + \cos\frac{\omega t}{2}.\vec{u}_\theta\right)}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(-2R\omega^2.\cos\frac{\omega}{2}t\right).\vec{u}_r - \left(R\omega^2.\sin\frac{\omega}{2}t\right)\vec{u}_\theta}$$

  - En coordonnées propres (Frenet): On remplace dans $(3)$ et $(4)$ :

$$\boxed{\vec{a} = R\omega^2.\vec{u}_N} \quad \boxed{\vec{v} = R\omega.\vec{u}_T}$$